Marius Burtea

Georgeta Burtea

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a IX-a

Trunchi comun

+

curriculum diferențiat

Editura CARMINIS

CUPRINS

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

I. MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1 MULȚIMEA NUMERELOR REALE

1.1. OPERAȚII ALGEBRICE CU NUMERE REALE

Din clasele anterioare sunt cunoscute următoarele mulțimi de numere:

a) mulțimea numerelor naturale: $\mathbb{N}=\{0, 1, 2, ..., n, ...\}$;

b) mulțimea numerelor întregi: $\mathbb{Z}=\{..., -n, ..., -2, -1, 0, 1, 2, 3, ..., n, ...\}$;

c) mulțimea numerelor raționale: $\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, a, b\in\mathbb{Z}, b\neq 0\right\}$;

d) mulțimea numerelor iraționale: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;

e) mulțimea numerelor reale: $\mathbb{R}$.

Între mulțimile de numere enumerate există următoarele relații:
$\mathbb{Q}\cup(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})=\varnothing$, $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

Pe mulțimea numerelor reale s-au definit două operații algebrice: adunarea și înmulțirea.

Adunarea

Operația de adunare pe $\mathbb{R}$ asociază oricărei perechi (x, y) de numere reale un unic număr real, notat $\mathbf{x+y}$ și numit **suma** lui x cu y.

✣ PROPRIETĂȚI

Pentru orice numere reale a, b, c au loc următoarele proprietăți:

❶ $a+b=b+a$ (adunarea este **comutativă**);

❷ $(a+b)+c=a+(b+c)$ (adunarea este **asociativă**);

❸ $a+0=0+a$ (0 este **element neutru** pentru adunare);

❹ $a+(-a)=(-a)+a=0$ (orice număr real a are un **opus**, $-a$).

Înmulțirea

Operația de înmulțire pe $\mathbb{R}$ asociază oricărei perechi (a, b) de numere reale un unic număr real, notat $a \cdot b$ sau ab, numit **produsul** lui a cu b.

PROPRIETĂȚI

Pentru orice numere reale a, b, c au loc proprietățile:

❶ $ab = ba$ (înmulțirea este **comutativă**);

❷ $(ab)c = a(bc)$ (înmulțirea este **asociativă**);

❸ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 este **element neutru** pentru înmulțire);

❹ $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$, pentru $a \neq 0$ (orice număr $a \neq 0$ are un **invers**, $\frac{1}{a}$).

Cele două operații cu numere reale sunt legate prin proprietatea de **distributivitate** a înmulțirii față de adunare:

❺ $a(b + c) = ab + ac$.

OBSERVAȚII

a) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, se definește **diferența** dintre a și b, notată $a - b$, prin egalitatea $a - b = a + (-b)$ (suma lui a cu opusul lui b).

b) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $b \neq 0$, se definește **câtul** dintre a și b, notat $\frac{a}{b}$ sau $a : b$, prin egalitatea $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ (a înmulțit cu inversul lui b).

c) Din proprietățile celor două operații algebrice se obțin următoarele reguli de calcul cu numere reale, valabile pentru orice numere reale a, b, c:

❶ $a \cdot 0 = 0 \cdot a$;

❷ $\left.\begin{array}{l}(-a)b = a(-b) = -ab \\ (-a)(-b) = ab;\end{array}\right\}$ **(regula semnelor);**

❸ $a(b - c) = ab - ac$ (distributivitatea înmulțirii față de scădere).

d) Pentru $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$ se definesc:

$1 \cdot a = a,\ 2 \cdot a = a + a,\ 3 \cdot a = 2a + a,\ \dots,\ n \cdot a = (n-1)a + a;$

$a^1 = a,\ a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a^2 \cdot a,\ \dots,\ a^n = a^{n-1} \cdot a$ (puterea cu exponent natural).

e) Pentru $a \in \mathbb{R}^*$ și $n \in \mathbb{N}$ se definesc:

$a^0 = 1,\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (puterea cu exponent întreg).

Din proprietățile înmulțirii numerelor reale se deduc următoarele reguli de calcul cu puteri cu exponent întreg.

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci au loc egalitățile:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $a^m \cdot b^m = (ab)^m$.

f) Fie a un număr real pozitiv.

Rădăcina pătrată (radicalul) a numărului real pozitiv a, notată $\sqrt{a}$, este numărul real pozitiv al cărui pătrat este egal cu a.

Așadar $\sqrt{a}$ verifică relațiile: $\sqrt{a} > 0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$, $(a > 0)$.

Pentru $a = 0$, $\sqrt{0} = 0$.

Câteva reguli de calcul cu radicali

Fie a, b numere reale pozitive. Atunci au loc egalitățile:

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$;

b) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$;

c) $\left(\sqrt{a}\right)^n = \sqrt{a^n}$, $n \in \mathbb{Z}$;

d) introducerea unui factor sub radical:

$$x\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{x^2 b}, & x \geq 0,\ b \geq 0 \\ -\sqrt{(-x)^2 b}, & x < 0,\ b \geq 0 \end{cases}.$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se arate că pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}$ avem:**

a) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

b) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

c) $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$;

d) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$;

e) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$.

E2. **Să se calculeze:**

$(2x-y)^2$; $(4+2x)^2$;

$\left(2\sqrt{2} - 3a\right)\left(2\sqrt{2} + 3a\right)$; $\left(\dfrac{x}{3} + 2y\right)^3$;

$\left(\dfrac{y}{2} - 4z\right)^3$; $\left(3x - 2y + \sqrt{5}\right)^2$.

E3. **Să se arate că pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$ avem:**

a) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$;

b) $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$.

E4. **Descompuneți în factori:**

a) $(3x+1)^2 - (x+3)^2$;

b) $(3x+5)^2 - (x+1)^2$;

c) $\left(x + \sqrt{2}\right)^2 - 8$;

d) $\left(2x + \sqrt{3}\right)^2 - 27$;

e) $\left(\sqrt{2}x - 1\right)^2 - 32x^2$;

f) $a^6 - b^6$;

g) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 - \left(y - 2\sqrt{3}\right)^2$;

h) $14a - 49a^2 + 100b^2 - 1$.

E5. **Să se arate că:**

a) $9x^2 + y^2 + 42x - 4y + 55 = 2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -2,(3)$ și $y = 2$;

b) $\left[\left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^3 - 1 + 3 \cdot \dfrac{a+1}{a-1} - 3 \cdot \left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^2\right] :$ $: \left[3\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^2 - \left(\dfrac{a-1}{a+1}\right)^3 - 3\left(\dfrac{a-1}{a+1}\right) + 1\right] =$ $= \left(\dfrac{a+1}{a-1}\right)^3$.

E6. **Să se efectueze:**

a) $\left(\sqrt{3}\right)^5 : \left(-\sqrt{3^3}\right) - 3 \cdot \sqrt{0,(3)} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$;

b) $\left[\sqrt{6561} \cdot \dfrac{-3,4(1)}{-27,9} - \left(\dfrac{4}{3}\right)^{-2} \cdot 0,(4)\right] \cdot$ $\cdot \left(-\dfrac{6}{\sqrt{7}}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{10}$;

c) $\left[-1,2(5)+0,1(4)\right]\cdot\left[12-1,1(5)-\right.$
$\left.-1,8(4)\right]$.

E7. **Cu cât este egală media aritmetică m_a, media geometrică m_g și media armonică m_h a numerelor x, y dacă:**

a) $x=\left[5,(6)-\frac{15}{4}+0,75\right]\cdot\frac{3}{2}$ și
$y=\left(\frac{1}{12}\right)^{-1}+\sqrt{116,64}:\frac{27}{10}$;

b) $x=\left(3\frac{3}{5}\right)^{-1}+\sqrt{0,8(3)\cdot 0,0(3)}$ și
$y=\frac{7}{2\sqrt{3}}\cdot\left[0,125-0,25+(-1)^{-8}\right]^{-1}$?

E8. **Se consideră numerele reale a și b cu $a+b=12$ și $ab=24$. Să se calculeze:**

a) $a^2+b^2,\ a^3+b^3,\ a^4+b^4,\ a^6+b^6$;

b) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b},\ \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2},\ \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3},\ \frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}$.

E9. **Să se arate că dacă $a, b, c\in\mathbb{R}$, atunci:**

a) $a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca=$
$=\frac{1}{2}\left[(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\right]$;

b) $a^3+b^3+c^3=(a+b+c)^3-$
$-3(a+b)(b+c)(c+a)$;

c) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)\cdot$
$\cdot\left(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca\right)$.

1.2. ORDONAREA NUMERELOR REALE

Reamintim că **axa numerelor** (axa numerelor reale) este o dreaptă pe care s-a ales o origine O, un segment unitate și un sens numit sensul pozitiv.

Este cunoscut că fiecărui număr real **a** i se poate asocia un punct A pe axa numerelor, pentru care **a** reprezintă abscisa acestuia și scriem $A(a)$.

De exemplu, numerelor reale 0,5, $-\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ li se asociază pe axa numerelor punctele M, N, respectiv P (figura 1).

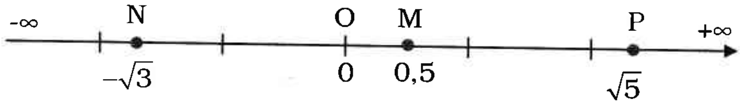


Figura 1

În acest fel ne putem imagina numerele reale ca puncte ale axei numerelor.

Fie a și b numere reale cărora le corespund punctele A și B pe axa numerelor.

Spunem că **a este mai mic decât b** și scriem $a<b$ dacă pe axa numerelor punctul A este la stânga punctului B (figura 2).

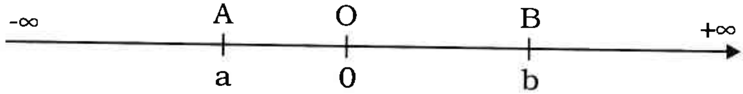


Figura 2

Relația $a<b$ se mai scrie sub forma $b>a$ și se citește „b este mai mare dec

Numerele reale x care corespund punctelor axei aflate la dreapta originii se numesc **numere pozitive** și se folosește notația $x>0$ (figura 3).

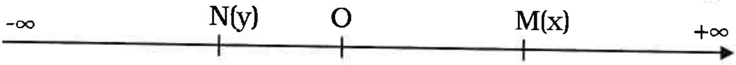


Figura 3

Numerele reale y care corespund punctelor axei aflate la stânga originii se numesc **numere negative** și se folosește notația $y < 0$ (figura 3).

✣ PROPRIETĂȚI

Relația „ $<$ " definită pe $\mathbb{R}$ are proprietățile:

❶ **Legea de trihotomie**

Oricare ar fi numerele reale a, b are loc una și numai una dintre relațiile: $a < b$, $a = b$, $a > b$.

❷ **Proprietatea de tranzitivitate**

Dacă numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfac relațiile $a < b$, $b < c$, atunci $a < c$.

➲ OBSERVAȚII

Din legea de trihotomie rezultă că dacă **a** nu este mai mare decât **b**, atunci **a** poate fi mai mic decât **b** sau egal cu **b** și se scrie $\mathbf{a \le b}$ (se citește „a mai mic sau egal cu b").

Așadar, $a \le b$ dacă și numai dacă $a < b$ sau $a = b$.

În loc de $a \le b$ se mai scrie $b \ge a$ (se citește „b mai mare sau egal cu a").

Relația „ $\le$ " (mai mic sau egal) definită pe $\mathbb{R}$ are următoarele proprietăți:

❶ **Reflexivitatea.** Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \le a$.

❷ **Antisimetria.** Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ și $b \le a$, atunci $a = b$.

❸ **Tranzitivitatea.** Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \le b$, $b \le c$, atunci $a \le c$.

Relația „ $\le$ " definită pe $\mathbb{R}$, care satisface aceste proprietăți se numește **relație de ordine pe $\mathbb{R}$**.

❹ Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x \le y$ sau $y \le x$.

Se spune că **relația de ordine pe $\mathbb{R}$ este totală**.

❺ Proprietățile de compatibilitate între operațiile algebrice și relația de ordine pe $\mathbb{R}$:

- Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \le b$, atunci $a + x \le b + x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.
- Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \le b$, atunci $ax \le bx$, $\forall\ x \ge 0$.

Din proprietățile operațiilor algebrice și cele ale relației de ordine „ $\le$ " se deduc toate regulile calculului algebric și ale calculului cu inegalități.

Reamintim câteva reguli uzuale ale calculului cu inegalități:

- dacă $a \le b$, atunci $-a \ge -b$;
- dacă $a \le b$ și $x < 0$, atunci $ax \ge bx$ și $\frac{a}{x} \ge \frac{b}{x}$;
- dacă $0 < a \le b$, atunci $0 < \frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$;
- dacă $0 < a \le b$ și $0 < c \le d$, atunci $ac \le bd$ și $\frac{a}{d} \le \frac{b}{c}$;
- dacă a și b au același semn, atunci produsul ab este pozitiv;
- dacă a și b au semne diferite, atunci produsul ab este negativ.

Exercițiu rezolvat

☒ Fie a și b două numere reale pozitive și $m_h = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ (media armonică), $m_g = \sqrt{ab}$ (media geometrică), $m_a = \dfrac{a+b}{2}$ (media aritmetică).

Să se demonstreze că: $m_h \le m_g \le m_a$ **(inegalitatea mediilor).**

<u>Soluție</u>

Arătăm că $m_h \le m_g$. Scriem inegalitatea sub forme echivalente ajungând la o inegalitate evident adevărată. Se obține succesiv:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \le a+b \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0,$$

inegalitate adevărată. Așadar, $m_h \le m_g$.

Demonstrăm că $m_g \le m_a$ urmând scrierea sub forme echivalente.

Avem succesiv: $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \le a+b \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \ge 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0,$

inegalitate adevărată.

Rezultă că $m_h \le m_g \le m_a$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Fie a și b numere reale pozitive. Să se ordoneze de la cel mai mic la cel mai mare numerele: a, b, $\dfrac{a+b}{2}$, $\sqrt{a^2+b^2}$.

E2. Fie a, b numere reale pozitive. Să se arate că:

a) $\dfrac{a+b}{2} \le \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$;

b) $m_a - m_g \ge m_g - m_h$;

c) $m_g \le \dfrac{m_a+m_h}{2} \le m_a$.

E3. Dacă $0<a<b$ să se arate că:

a) $m_a - m_h \le \dfrac{(b-a)^2}{4a}$;

b) $m_a - m_g \le \dfrac{(b-a)^2}{8a}$.

E4. Fie a, b, x, y numere reale. Atunci au loc inegalitățile:

a) $(ax+by)^2 \le \left(a^2+b^2\right)\left(x^2+y^2\right)$

(inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz);

b) $\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2} \le \sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}$

(inegalitatea lui Minkowski).

APROFUNDARE

A1. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a} \le \dfrac{a+b+c}{2}$;

b) $\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{a+c}{b}+\dfrac{a+b}{c} \ge 6$.

A2. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se demonstreze că:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \ge 8abc$;

b) $a\left(b^2+c^2\right)+b\left(a^2+c^2\right)+$
$+c\left(a^2+b^2\right) \ge 6abc$;

c) $2(a^3+b^3+c^3) \geq (a+b)ab + (b+c)bc + (a+c)ac$;

d) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$.

A3. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere pozitive. Să se arate că:

$$\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_1a_3}+\dots+\sqrt{a_1a_n}+\sqrt{a_2a_3}+\dots+\sqrt{a_{n-1}a_n} \leq \frac{n-1}{2}(a_1+a_2+\dots+a_n).$$

A4. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere pozitive cu suma 1. Să se arate că:

a) $\dfrac{a_1a_2}{a_1+a_2}+\dfrac{a_2a_3}{a_2+a_3}+\dots+\dfrac{a_na_1}{a_n+a_1} \leq \dfrac{1}{2}$;

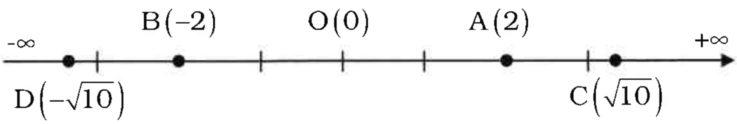
b) $\sqrt{a_1(a_2+a_3+\dots+a_n)}+\sqrt{a_2(a_1+a_3+\dots+a_n)}+\dots+\sqrt{a_n(a_1+a_2+\dots+a_{n-1})} \leq \dfrac{n}{2}$.

A5. Fie $a_1, a_2, \dots, a_n$ numere pozitive cu produsul 1. Să se arate că:

$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n) \geq 2^n$.

1.3. MODULUL UNUI NUMĂR REAL

Să considerăm pe axa numerelor reale punctele $A(2)$, $B(-2)$, $C(\sqrt{10})$ și $D(-\sqrt{10})$.



Avem că $OA = OB = 2$ și $OC = OD = \sqrt{10}$.

Mai general, dacă $M(a)$ și $N(-a)$ sunt puncte pe axa numerică, ele sunt simetrice față de originea $O(0)$ și $d(O, M) = d(O, N)$.

DEFINIȚIE

• Se numește **modulul** sau **valoarea absolută** a numărului real a distanța măsurată pe axa numerică de la origine la punctul corespunzător numărului a și se notează $|a|$.

Așadar, $|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$.

Exemple

• $|-3| = 3$; $|-\sqrt{10}| = \sqrt{10}$; $|8| = 8$; $|0| = 0$; $\left|\frac{5}{7}\right| = \frac{5}{7}$; $|-3,21| = 3,21$.

OBSERVAȚIE

• Din definiția modulului unui număr real rezultă cu ușurință următoarele proprietăți:

a) $|a| \geq 0$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$;

b) $|a| = 0$ dacă și numai dacă $a = 0$;

c) $|a| = \max(-a, a)$ (cel mai mare dintre numerele a și $-a$);

d) $|-a| = |a|$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

$OA = OB$

$|a| = |-a|$

Alte proprietăți ale modulului unui număr real sunt cuprinse în teoremele care urmează.

TEOREMA 1

Pentru orice numere reale a, b au loc relațiile:

1. $|a+b| \le |a| + |b|$ (inegalitatea triunghiului);

2. $|a-b| \le |a| + |b|$ (modulul diferenței este mai mic sau egal decât suma modulelor);

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (modulul produsului este egal cu produsul modulelor);

$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ (modulul câtului este egal cu câtul modulelor);

4. $\big||a| - |b|\big| \le |a-b|$ (modulul diferenței modulelor este mai mic sau egal decât modulul diferenței);

$\big||a| - |b|\big| \le |a+b|$ (modulul diferenței modulelor este mai mic sau egal decât modulul sumei).

Demonstrație

1. Trebuie discutate următoarele patru cazuri:

a) Dacă $a \ge 0$, $b \ge 0$, atunci $a+b \ge 0$ și inegalitatea devine egalitate:
$|a+b| = a+b = |a| + |b|$.

b) Dacă $a \le 0$, $b \le 0$, atunci $a+b \le 0$ și inegalitatea devine egalitate:
$|a+b| = -a-b = |a| + |b|$.

c) Dacă $a \ge 0$, $b \le 0$, atunci $|a| = a$ și $|b| = -b$.

Dacă $a+b \ge 0$, atunci $|a+b| = a+b \le a = |a| \le |a| + |b|$.

Dacă $a+b \le 0$, atunci $|a+b| = -a-b = -a+|b| \le |b| \le |b| + |a|$.

d) Cazul $a \le 0$, $b \ge 0$ se tratează precum cazul c).

2. Avem succesiv: $|a-b| = |a+(-b)| \overset{1}{\le} |a| + |-b| = |a| + |b|$.

3. Demonstrația egalităților $|ab| = |a||b|$, $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ rămâne drept temă.

4. Avem $|a| = |a-b+b| = |(a-b)+b| \overset{1}{\le} |a-b| + |b|$. Rezultă că $|a| - |b| \le |a-b|$, (1).
$|b| = |b-a+a| = |(b-a)+a| \le |b-a| + |a|$, deci $|b| - |a| \le |b-a| = |a-b|$, (2).
Deoarece $\big||a| - |b|\big|$ este egal cu unul dintre numerele $|a| - |b|$ sau $|b| - |a|$, rezultă cu ajutorul relațiilor (1) și (2) că $\big||a| - |b|\big| \le |a-b|$. ■

Temă

- **Demonstrați inegalitatea $\left||a|-|b|\right| \le |a+b|$.**

Următoarele proprietăți sunt des folosite în rezolvarea unor inecuații sau în caracterizarea intervalelor de numere reale.

TEOREMA 2

Pentru orice număr real a și orice număr real pozitiv c au loc relațiile:

1. $|a| \le c$ dacă și numai dacă $-c \le a \le c$;

2. $|a| \ge c$ dacă și numai dacă $a \le -c$ sau $a \ge c$.

Demonstrație

1. *Suficiența* $(\Rightarrow)$ Considerăm că $|a| \le c$.

Dacă $a \ge 0$ rezultă că $|a| = a \le c$.

Dacă $a < 0$, rezultă că $|a| = -a \le c$, adică $a \ge -c$.

Așadar $-c \le a \le c$, $\forall\ a \in \mathbb{R}$ și $c > 0$.

2. *Necesitatea* $(\Leftarrow)$ Considerăm ipoteza $-c \le a \le c$, (1).

Înmulțind cu -1 rezultă inegalitățile: $c \ge -a \ge -c$, adică $-c \le -a \le c$, (2).

Dacă $a \ge 0$, atunci $|a| = a$ și din (1) se obține că $|a| \le c$.

Dacă $a < 0$, atunci $|a| = -a$ și din (2) rezultă că $|a| \le c$. ■

Temă

- **Justificați proprietatea modulului: $|a| \ge c \Leftrightarrow a \le -c$ sau $a \ge c$.**
- **Demonstrați teorema 2, înlocuind inegalitățile $\le$, $\ge$ cu $<$, respectiv $>$.**

Exerciții rezolvate

1. Pentru orice număr real a avem că: $\sqrt{a^2} = |a|$.

a) Dacă $0 \le a \le 2$ să se scrie sub formă mai simplă expresia:

$$E(a) = \sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{4+4a+a^2} - \sqrt{(3-a)^2} + \sqrt{4a^2+49-28a}.$$

b) Să se demonstreze că:

$$\sqrt{y^2 - 4\sqrt{2}y + 12} + \sqrt{5t^2 + 40t + 89} \ge 5,\ \forall\ y, t \in \mathbb{R}.$$

Soluție

a) Din condiția $0 \le a \le 2$ obținem că:

$a - 2 \le 0$, $a + 2 \ge 2 > 0$, $(3 - a) \ge 1 > 0$ și $2a - 7 \le -3 < 0$, (1).

Expresia se scrie succesiv:

$$E(a) = \sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(2+a)^2} - \sqrt{(3-a)^2} + \sqrt{(2a-7)^2} = |a-2| + |2+a| - |3-a| +$$

$$+|2a-7| \overset{(1)}{=} (-a+2) + (2+a) - (3-a) + (-2a+7) = 8 - a.$$

b) Analizăm expresiile de sub radical și avem:

$y^2 - 4\sqrt{2}y + 12 = \left(y - 2\sqrt{2}\right)^2 + 4 \geq 4,\ \forall\ y \in \mathbb{R}$.

$5t^2 + 40t + 89 = 5\left(t^2 + 8t + 16\right) + 9 = 5(t+4)^2 + 9 \geq 9,\ \forall\ t \in \mathbb{R}$.

Rezultă că $\sqrt{y^2 - 4\sqrt{2}y + 12} + \sqrt{5t^2 + 40t + 89} \geq 2 + 3 = 5,\ \forall\ y,\ t \in \mathbb{R}$.

☒ **2.** Dacă $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ să se demonstreze că:

a) $\left|\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right| = \left|\frac{a-b}{c} \cdot \frac{b-c}{a} \cdot \frac{c-a}{b}\right|$;

b) $\left|\frac{a-b}{c}\right| + \left|\frac{b-c}{a}\right| + \left|\frac{a-c}{b}\right| \geq \left|\frac{a-b}{c}\right| \cdot \left|\frac{b-c}{a}\right| \cdot \left|\frac{c-a}{b}\right|$.

Soluție

a) Prin calcul algebric se obține succesiv:

$$\left|\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right| = \left|\frac{ab(a-b) + b^2c - c^2b + c^2a - a^2c}{abc}\right| =$$

$$= \left|\frac{ab(a-b) - c\left(a^2 - b^2\right) + c^2(a-b)}{abc}\right| = \left|\frac{(a-b)\left(ab - ac - bc + c^2\right)}{abc}\right| =$$

$$= \left|\frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc}\right| = \left|\frac{a-b}{c} \cdot \frac{b-c}{a} \cdot \frac{c-a}{b}\right|.$$

b) Se folosesc proprietățile modulului:

$|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|,\ \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$ și $|xyz| = |x| \cdot |y| \cdot |z|,\ \forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

Avem: $\left|\frac{a-b}{c}\right| + \left|\frac{b-c}{a}\right| + \left|\frac{c-a}{b}\right| \geq \left|\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right| \overset{a)}{=} \left|\frac{a-b}{c} \cdot \frac{b-c}{a} \cdot \frac{c-a}{b}\right| =$

$= \left|\frac{a-b}{c}\right| \cdot \left|\frac{b-c}{a}\right| \cdot \left|\frac{c-a}{b}\right|$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. **Să se determine numerele reale care verifică expresiile:**

a) $|a| = 8$; **b)** $|x| = -8$;

c) $|-y| = 2$; **d)** $|a + 3| = 1$;

e) $|-x - 4| = 5$; **f)** $|3 - 6y| = 12$;

g) $\left|\frac{x}{2} - \frac{x-3}{4}\right| = 2$; **h)** $|(x-2)(4-y)| = 0$.

E2. **Să se determine numerele întregi care verifică egalitățile:**

a) $\left|\frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6}\right| = \frac{15}{2}$;

b) $\left|x(x-2) - (x-3)^2\right| = 3$;

c) $\left|(2-x)(x+2) + (x+3)^2\right| = 5$;

d) $\left|\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 - 2x\left(x + \frac{1}{4}\right)\right| = 2$;

e) $\left|4x^2 + 9x - 9\right| = 0$;

f) $\left|(x+1)^3 - (x-2)^3\right| = 9$;

g) $\left|\frac{3}{x^3 - 8}\right| = \left|\frac{1}{x-2}\right|$.

E3. Să se determine numerele reale care verifică inegalitățile:

a) $|3x-2| \le 0$;   b) $|4-6x| < 0$;

c) $|x| < 3$;   d) $|3x-4| - 5 \le 0$;

e) $|y-2| > 0$;   f) $|a+5| \ge 0$;

g) $|x^5 - 1| + |x^6 + 9| > 0$.

E4. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\left|\dfrac{3n+1}{n} - 3\right| > \dfrac{1}{5}$, $n \in \mathbb{N}^*$;

b) $\left|\dfrac{n+1}{2n+3} - \dfrac{1}{2}\right| > \dfrac{1}{12}$, $n \in \mathbb{Z}$;

c) $\left|1 - \dfrac{n^2+2}{n^2+1}\right| \ge \dfrac{1}{10}$, $n \in \mathbb{Z}$;

d) $\left|\dfrac{3^n+2}{3^n+1} - 1\right| \le \dfrac{1}{28}$, $n \in \mathbb{N}$.

E5. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|2x+3| - 4|2-(2x+5)| = -27$;

b) $\dfrac{|x|-1}{4} - \left(\dfrac{|x|-2}{4} + \dfrac{7-2|x|}{5}\right) = \dfrac{|5x|-5}{10} - \dfrac{7}{4}$;

c) $\dfrac{3}{2}\left|x - \dfrac{3}{2}\right| = \dfrac{5}{3}\left|x - \dfrac{3}{2}\right| - \dfrac{8}{5}$;

d) $4|2x| - 7{,}1(6) = \dfrac{5}{3}|2x| - \dfrac{1}{6}$;

e) $|9x+45| = |3x+15|$;

f) $|x^2 - 9| + |x+3| = 0$;

g) $\sqrt{(x^2 - 10x + 25)} + 5|x-5| = 0$;

h) $\sqrt{25x^2 - 30x + 9} = \sqrt{9x^2 + 24x + 16}$.

APROFUNDARE

A1. Dacă $a \in \mathbb{N}$ și $b \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, să se scrie sub formă mai simplă expresia:

$$\sqrt{25a^2} - \sqrt{\frac{b^2}{4^{-2}}} + \sqrt{\frac{1}{(a+1)^{-2}}} - \sqrt{(2a+1)^2} - \sqrt{(b-a)^2}.$$

A2. Dacă $-2 \le b \le -1$, să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{(b+1)^2} - \sqrt{(b+2)^2} + \sqrt{(3-2b)^2} = \sqrt{(b-3)^2}.$$

A3. Dacă $x < 0$ să se rezolve ecuația:

$$|x^2+8| - |3x-2| - \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(2-x)^2} - \sqrt{x^4} - \sqrt{(-2x)^2} = 0.$$

A4. Fie $x, y \in \mathbb{R}$ astfel încât $|y - 2x - 7| \le 3$ și $|4 - 3y| \le 2$. Să se arate că $-4 \le x+y \le 1$.

A5. Fie $x_i \in \mathbb{R}$ și $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$.
Să se arate că $|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n| \le |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$.

A6. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se arate că:

$$(ab+bc+ca)\left|1 - \frac{1}{abc}\right| \le \left|ab - \frac{1}{c}\right| + \left|bc - \frac{1}{a}\right| + \left|ac - \frac{1}{b}\right|.$$

A7. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, să se demonstreze că:

a) $(|a|+|b|+|c|)\left(\dfrac{1}{|a|} + \dfrac{1}{|b|} + \dfrac{1}{|c|}\right) \ge 9$;

b) $\dfrac{1}{|a|} + \dfrac{1}{|b|} + \dfrac{1}{|c|} \le \dfrac{a^2+b^2+c^2}{|abc|}$.

A8. Fie $a > 0$ și $x, y, z \in \mathbb{R}$ astfel încât:

$|x| < \dfrac{1}{a}$, $|y| < \dfrac{1}{a}$, $|z| < \dfrac{1}{a}$.

Să se demonstreze că:

a) $\left|\dfrac{x+y}{1+a^2xy}\right| < \dfrac{1}{a}$;

b) $\left|\dfrac{x+y+z+a^2xyz}{1+a^2(xy+xz+yz)}\right| < \dfrac{1}{a}$.