

LBRIS

We know
books

Marius Burtea

Georgeta Burtea

MATEMATICĂ

Manual pentru clasa a IX-a

Trunchi comun

+

curriculum diferențiat



Editura CARMINIS

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

Capitolul 1 - MULȚIMI ȘI ELEMENTE

DE LOGICĂ MATEMATICĂ	5
1. Multimea numerelor reale	5
1.1. Operații algebrice cu numere reale	5
1.2. Ordonarea numerelor reale	8
1.3. Modulul unui număr real	11
1.4. Aproximări prin lipsă sau prin adaos	16
1.5. Partea întreagă. Partea fracționară a unui număr real	19
1.6. Operații cu intervale de numere reale. Generalizare. Tipuri de intervale de numere reale	21
2. Propoziție. Predicat. Cuantificatori	28
2.1. Enunț. Propoziție. Valoare de adevăr	28
2.2. Predicate	29
2.3. Cuantificator universal. Cuantificator existential	30
3. Operații logice elementare corelate cu operații și relații cu mulțimi	34
3.1. Operații logice elementare cu propoziții	34
3.2. Formule ale calculului propozitional	39
3.3. Operații logice elementare cu predicate. Operații și relații cu mulțimi	42
3.4. Legile lui De Morgan pentru mulțimi	45
3.5. Reguli de negare a propozițiilor universale și a propozițiilor existențiale	48
3.6. Condiții necesare. Condiții suficiente	50
4. Tipuri de raționamente logice	54
4.1. Metoda inducției matematice	55
4.2. Probleme de numărare	60

Capitolul II - FUNCȚII

1. Siruri de numere reale	69
1.1. Noțiunea de sir de numere reale	69
1.2. Siruri mărginite	71
1.3. Siruri monotone	72
2. Tipuri de siruri	76
2.1. Progresii aritmetice	76
2.2. Progresii geometrice	81
2.3. Aplicații	86
3. Funcții. Lecturi grafice	92
3.1. Reper cartezian. Produs cartezian	92
3.2. Drepte în plan de forma $x = m$ sau $y = m$, $m \in \mathbb{R}$	95
3.3. Noțiunea de funcție	98
3.4. Imaginea și preimaginea unei mulțimi printr-o funcție	105
3.5. Graficul unei funcții	106
3.6. Restricții ale unei funcții	107
3.7. Funcții numerice	109
4. Proprietăți generale ale funcțiilor	116
4.1. Funcții mărginite	116
4.2. Funcții pare. Funcții impare	118
4.3. Funcții periodice	123
4.4. Funcții monotone	125
5. Compunerea funcțiilor	128

Capitolul III - FUNCȚIA DE GRADUL I

1. Definiția funcției de gradul I. Reprezentare grafică	134
2. Interpretarea grafică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul I	141
2.1. Monotonia funcției de gradul I	141
2.2. Semnul funcției de gradul I	142

3. Inecuații de forma $ax + b \leq 0$ (\geq , $<$, $>$) studiate pe \mathbb{R} sau pe intervale de numere reale ...	145
4. Poziții relative a două drepte. Sisteme de ecuații de tipul: $ax + by = c$, $mx + ny = p$, $a, b, c, m, n, p \in \mathbb{R}$	149
5. Sisteme de inecuații de gradul I	152

Capitolul IV - FUNCȚIA DE GRADUL

AL DOILEA	155
1. Definiția și reprezentarea grafică a funcției de gradul al doilea	155
1.1. Forma canonică a funcției de gradul al doilea	155
1.2. Maximul sau minimul funcției de gradul al doilea	156
1.3. Simetria graficului funcției de gradul al doilea față de drepte de forma $x = m$	158
1.4. Intersecția graficului funcției de gradul al doilea cu axele de coordonate	158
1.5. Proprietăți ale punctelor graficului funcției de gradul al doilea	160
1.6. Reprezentarea grafică a funcției de gradul al doilea	162
2. Relațiile lui Viète	166
3. Interpretarea geometrică a proprietăților algebrice ale funcției de gradul al doilea	171
3.1. Monotonia funcției de gradul al doilea	171
3.2. Pozitionarea parabolei față de axa Ox	174
3.3. Inecuații de forma $ax^2 + bx + c \leq 0$ (\geq , $<$, $>$), $a \neq 0$	178
3.4. Poziția relativă a unei drepte față de o parabolă	181
3.5. Rezolvarea sistemelor de ecuații de forma $a_1x^2 + b_1x + c_1 = y$, $a_2x^2 + b_2x + c_2 = y$, $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$	185
Probleme recapitulative	190

ELEMENTE DE GEOMETRIE

Capitolul I - VECTORI ÎN PLAN	194
1. Segmente orientate. Relația de echipolență	194
1.1. Direcția unei drepte în plan	194
1.2. Sens pe o dreaptă	195
1.3. Sensul a două semidrepte care au aceeași direcție	195
1.4. Segmente orientate	196
1.5. Relația de echipolență pe mulțimea segmentelor orientate	197
2. Operații cu vectori	199
2.1. Adunarea vectorilor în plan	199
2.2. Proprietăți ale adunării vectorilor	200
2.3. Adunarea mai multor vectori	202
2.4. Descompunerea unui vector după două direcții date	205
2.5. Înmulțirea cu scalari a vectorilor	206
2.6. Descompunerea unui vector după doi vectori necoliniari	211
2.7. Descompunerea unui vector într-un reper cartezian	212

<p>Capitolul II. COLINIARITATE, CONCURENȚĂ, PARALELISM 218</p> <p>1. Vectorul de poziție al unui punct în plan 218</p> <p>2. Teorema lui Thales 220</p> <p>3. Vectorul de poziție al centrului de greutate al unui triunghi 223</p> <p style="padding-left: 20px;">3.1. Centre de greutate 223</p> <p style="padding-left: 20px;">3.2. Concurența medianelor unui triunghi ... 224</p> <p>4. Teorema bisectoarei. Relația lui Sylvester 226</p> <p>5. Teorema lui Menelau 231</p> <p>Capitolul III - ELEMENTE DE TRIGONOMETRIE . 234</p> <p>1. Unghiuri și arce. Măsura unghiurilor și a arcelor 234</p> <p>2. Generalizarea noțiunii de unghi 235</p> <p>3. Funcții trigonometrice definite pe intervalul $[0, 2\pi]$ 239</p> <p style="padding-left: 20px;">3.1. Funcțiile sinus și cosinus 239</p> <p style="padding-left: 20px;">3.2. Funcțiile tangentă și cotangentă..... 241</p> <p>4. Semnul funcțiilor trigonometrice 242</p> <p>5. Formule de reducere la primul cadran 244</p> <p>6. Paritatea și imparitatea funcțiilor trigonometrice.. 247</p> <p>7. Relații între funcțiile trigonometrice ale aceluiași unghi 248</p>	<p>8. Funcțiile trigonometrice ale unei sume și ale unei diferențe de unghiuri..... 252</p> <p>9. Transformarea sumelor în produs și a produselor în sume 256</p> <p>Capitolul IV - APLICAȚII ALE TRIGONOMETRIEI ÎN GEOMETRIA PLANĂ 260</p> <p>1. Produsul scalar a doi vectori 260</p> <p style="padding-left: 20px;">1.1. Unghiul a doi vectori 260</p> <p style="padding-left: 20px;">1.2. Proprietăți ale produsului scalar 260</p> <p style="padding-left: 20px;">1.3. Teorema cosinusului 263</p> <p style="padding-left: 20px;">1.4. Teorema sinusurilor 263</p> <p>2. Aplicații vectoriale în geometria plană 265</p> <p style="padding-left: 20px;">2.1. Calculul lungimilor medianelor unui triunghi 265</p> <p style="padding-left: 20px;">2.2. Relația lui Leibniz..... 266</p> <p>3. Aplicații trigonometrice în geometria plană 268</p> <p style="padding-left: 20px;">3.1. Rezolvarea triunghiurilor 268</p> <p style="padding-left: 20px;">3.2. Raza cercului circumscris și raza cercului înscris unui triunghi 271</p> <p style="padding-left: 20px;">3.3. Formule pentru aria triunghiului 272</p> <p>Probleme recapitulative 276</p> <p>INDICAȚII ȘI SOLUȚII 279</p>
--	--

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

I. MULȚIMI ȘI ELEMENTE DE LOGICĂ MATEMATICĂ

1 MULȚIMEA NUMERELOR REALE

1.1. OPERAȚII ALGEBRICE CU NUMERE REALE

Din clasele anterioare sunt cunoscute următoarele mulțimi de numere:

a) mulțimea numerelor naturale: $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$;

b) mulțimea numerelor întregi: $\mathbb{Z} = \{\dots, -n, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$;

c) mulțimea numerelor raționale: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$;

d) mulțimea numerelor iraționale: $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;

e) mulțimea numerelor reale: \mathbb{R} .

Între mulțimile de numere enumerate există următoarele relații:

$$\mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R}, \quad \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset, \quad \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Pe mulțimea numerelor reale s-au definit două operații algebrice: adunarea și înmulțirea.

Adunarea

Operația de adunare pe \mathbb{R} asociază oricărei perechi (x, y) de numere reale un unic număr real, notat $x + y$ și numit **suma** lui x cu y .

✚ PROPRIETĂȚI

Pentru orice numere reale a, b, c au loc următoarele proprietăți:

- ① $a + b = b + a$ (adunarea este **comutativă**);
- ② $(a + b) + c = a + (b + c)$ (adunarea este **asociativă**);
- ③ $a + 0 = 0 + a$ (0 este **element neutru** pentru adunare);
- ④ $a + (-a) = (-a) + a = 0$ (orice număr real a are un **opus**, $-a$).

Operația de înmulțire pe \mathbb{R} asociază oricărei perechi (a, b) de numere reale un unic număr real, notat $a \cdot b$ sau ab , numit **produsul** lui a cu b .

✦ PROPRIETĂȚI

Pentru orice numere reale a, b, c au loc proprietățile:

- ❶ $ab = ba$ (înmulțirea este **comutativă**);
- ❷ $(ab)c = a(bc)$ (înmulțirea este **asociativă**);
- ❸ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (1 este **element neutru** pentru înmulțire);
- ❹ $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$, pentru $a \neq 0$ (orice număr $a \neq 0$ are un **invers**, $\frac{1}{a}$).

Cele două operații cu numere reale sunt legate prin proprietatea de **distributivitate** a înmulțirii față de adunare:

❺ $a(b + c) = ab + ac$.

➤ OBSERVAȚII

a) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, se definește **diferența** dintre a și b , notată $a - b$, prin egalitatea $a - b = a + (-b)$ (suma lui a cu opusul lui b).

b) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $b \neq 0$, se definește **câtul** dintre a și b , notat $\frac{a}{b}$ sau $a : b$, prin egalitatea $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$ (a înmulțit cu inversul lui b).

c) Din proprietățile celor două operații algebrice se obțin următoarele reguli de calcul cu numere reale, valabile pentru orice numere reale a, b, c :

❶ $a \cdot 0 = 0 \cdot a$;

❷ $(-a)b = a(-b) = -ab$
 $(-a)(-b) = ab$ } **(regula semnelor);**

❸ $a(b - c) = ab - ac$ (distributivitatea înmulțirii față de scădere).

d) Pentru $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}$ se definesc:

$1 \cdot a = a, 2 \cdot a = a + a, 3 \cdot a = 2a + a, \dots, n \cdot a = (n - 1)a + a$;

$a^1 = a, a^2 = a \cdot a, a^3 = a^2 \cdot a, \dots, a^n = a^{n-1} \cdot a$ (puterea cu exponent natural).

e) Pentru $a \in \mathbb{R}^*$ și $n \in \mathbb{N}$ se definesc:

$a^0 = 1, a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ (puterea cu exponent întreg).

Din proprietățile înmulțirii numerelor reale se deduc următoarele reguli de calcul cu puteri cu exponent întreg.

Fie $a, b \in \mathbb{R}^*$ și $m, n \in \mathbb{Z}$. Atunci au loc egalitățile:

❶ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; ❸ $(a^m)^n = a^{mn}$;

❷ $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; ❹ $a^m \cdot b^m = (ab)^m$.

f) Fie a un număr real pozitiv.

Rădăcina pătrată (radicalul) a numărului real pozitiv a, notată \sqrt{a} , este numărul real pozitiv al cărui pătrat este egal cu a.

Asadar \sqrt{a} verifică relațiile: $\sqrt{a} > 0$, $(\sqrt{a})^2 = a$, ($a > 0$).

Pentru $a = 0$, $\sqrt{0} = 0$.

Câteva reguli de calcul cu radicali

Fie a, b numere reale pozitive. Atunci au loc egalitățile:

a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$;

c) $(\sqrt{a})^n = \sqrt{a^n}$, $n \in \mathbb{Z}$;

b) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$;

d) introducerea unui factor sub radical:

$$x\sqrt{b} = \begin{cases} \sqrt{x^2 b}, & x \geq 0, b \geq 0 \\ -\sqrt{(-x)^2 b}, & x < 0, b \geq 0 \end{cases}$$

EXERCIIU ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se arate că pentru oricare a, b ∈ ℝ avem:

a) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

c) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;

d) $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$;

e) $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$.

E2. Să se calculeze:

$(2x - y)^2$; $(4 + 2x)^2$;

$(2\sqrt{2} - 3a)(2\sqrt{2} + 3a)$; $\left(\frac{x}{3} + 2y\right)^3$;

$\left(\frac{y}{2} - 4z\right)^3$; $(3x - 2y + \sqrt{5})^2$.

E3. Să se arate că pentru orice a, b ∈ ℝ avem:

a) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

b) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.

E4. Descompuneți în factori:

a) $(3x + 1)^2 - (x + 3)^2$;

b) $(3x + 5)^2 - (x + 1)^2$;

c) $(x + \sqrt{2})^2 - 8$; d) $(2x + \sqrt{3})^2 - 27$;

e) $(\sqrt{2}x - 1)^2 - 32x^2$; f) $a^6 - b^6$;

g) $x^2 - 2\sqrt{3}x + 3 - (y - 2\sqrt{3})^2$;

h) $14a - 49a^2 + 100b^2 - 1$.

E5. Să se arate că:

a) $9x^2 + y^2 + 42x - 4y + 55 = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -2, (3) \text{ și } y = 2$;

b) $\left[\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^3 - 1 + 3 \cdot \frac{a+1}{a-1} - 3 \cdot \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2 \right]$;

$: \left[3 \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 - \left(\frac{a-1}{a+1}\right)^3 - 3 \left(\frac{a-1}{a+1}\right) + 1 \right] =$

$= \left(\frac{a+1}{a-1}\right)^3$.

E6. Să se efectueze:

a) $(\sqrt{3})^5 : (-\sqrt{3^3}) - 3 \cdot \sqrt{0, (3)} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-3}$;

b) $\left[\sqrt{6561} \cdot \frac{-3,4(1)}{-27,9} - \left(\frac{4}{3}\right)^{-2} \cdot 0, (4) \right]$.

$\cdot \left(-\frac{6}{\sqrt{7}}\right)^2 \cdot \frac{1}{10}$;

c) $[-1, 2(5) + 0, 1(4)] \cdot [12 - 1, 1(5) - 1, 8(4)]$.

E7. Cu cât este egală media aritmetică m_a , media geometrică m_g și media armonică m_h a numerelor x, y dacă:

a) $x = \left[5, (6) - \frac{15}{4} + 0, 75 \right] \cdot \frac{3}{2}$ și

$y = \left(\frac{1}{12} \right)^{-1} + \sqrt{116, 64} : \frac{27}{10}$;

b) $x = \left(3 \frac{3}{5} \right)^{-1} + \sqrt{0, 8(3) \cdot 0, 0(3)}$ și

$y = \frac{7}{2\sqrt{3}} \cdot [0, 125 - 0, 25 + (-1)^{-8}]^{-1}$?

E8. Se consideră numerele reale a și b cu $a + b = 12$ și $ab = 24$. Să se calculeze:

a) $a^2 + b^2, a^3 + b^3, a^4 + b^4, a^6 + b^6$;

b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3}, \frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4}$.

E9. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$, atunci:

a) $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = \frac{1}{2}[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2]$;

b) $a^3 + b^3 + c^3 = (a+b+c)^3 - 3(a+b)(b+c)(c+a)$;

c) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c) \cdot (a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$.

1.2. ORDONAREA NUMERELOR REALE

Reamintim că **axa numerelor** (axa numerelor reale) este o dreaptă pe care s-a ales o origine O , un segment unitate și un sens numit sensul pozitiv.

Este cunoscut că fiecărui număr real a i se poate asocia un punct A pe axa numerelor, pentru care a reprezintă abscisa acestuia și scriem $A(a)$.

De exemplu, numerelor reale $0,5, -\sqrt{3}, \sqrt{5}$ li se asociază pe axa numerelor punctele M, N , respectiv P (figura 1).

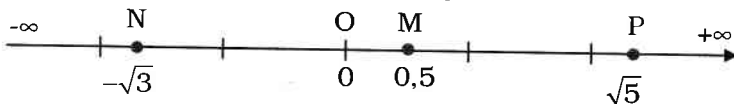


Figura 1

În acest fel ne putem imagina numerele reale ca puncte ale axei numerelor.

Fie a și b numere reale cărora le corespund punctele A și B pe axa numerelor.

Spunem că **a este mai mic decât b** și scriem $a < b$ dacă pe axa numerelor punctul A este la stânga punctului B (figura 2).

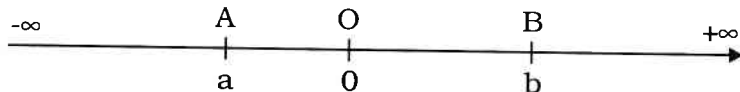


Figura 2

Relația $a < b$ se mai scrie sub forma $b > a$ și se citește „ b este mai mare decât a ”.

Numerele reale x care corespund punctelor axei aflate la dreapta originii se numesc **numere pozitive** și se folosește notația $x > 0$ (figura 3).

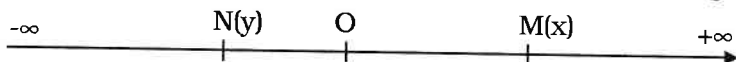


Figura 3

Numerele reale y care corespund punctelor axei aflate la stânga originii se numesc **numere negative** și se folosește notația $y < 0$ (figura 3).

✚ PROPRIETĂȚI

Relația „ $<$ ” definită pe \mathbb{R} are proprietățile:

① Legea de trihotomie

Oricare ar fi numerele reale a, b are loc una și numai una dintre relațiile:
 $a < b$, $a = b$, $a > b$.

② Proprietatea de tranzitivitate

Dacă numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$ satisfac relațiile $a < b$, $b < c$, atunci $a < c$.

☞ OBSERVAȚII

Din legea de trihotomie rezultă că dacă **a** nu este mai mare decât **b**, atunci **a** poate fi mai mic decât **b** sau egal cu **b** și se scrie **$a \leq b$** (se citește „a mai mic sau egal cu b”).

Așadar, $a \leq b$ dacă și numai dacă $a < b$ sau $a = b$.

În loc de $a \leq b$ se mai scrie $b \geq a$ (se citește „b mai mare sau egal cu a”).

Relația „ \leq ” (mai mic sau egal) definită pe \mathbb{R} are următoarele proprietăți:

① **Reflexivitatea.** Pentru orice $a \in \mathbb{R}$, $a \leq a$.

② **Antisimetria.** Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ și $b \leq a$, atunci $a = b$.

③ **Tranzitivitatea.** Dacă $a, b, c \in \mathbb{R}$ și $a \leq b$, $b \leq c$, atunci $a \leq c$.

Relația „ \leq ” definită pe \mathbb{R} , care satisface aceste proprietăți se numește **relație de ordine pe \mathbb{R}** .

④ Pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$ avem $x \leq y$ sau $y \leq x$.

Se spune că **relația de ordine pe \mathbb{R} este totală**.

⑤ Proprietățile de compatibilitate între operațiile algebrice și relația de ordine pe \mathbb{R} :

- Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \leq b$, atunci $a + x \leq b + x$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

- Dacă $a, b \in \mathbb{R}$ și $a \leq b$, atunci $ax \leq bx$, $\forall x \geq 0$.

Din proprietățile operațiilor algebrice și cele ale relației de ordine „ \leq ” se deduc toate regulile calculului algebric și ale calculului cu inegalități.

Reamintim câteva reguli uzuale ale calculului cu inegalități:

- dacă $a \leq b$, atunci $-a \geq -b$;

- dacă $a \leq b$ și $x < 0$, atunci $ax \geq bx$ și $\frac{a}{x} \geq \frac{b}{x}$;

- dacă $0 < a \leq b$, atunci $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$;

- dacă $0 < a \leq b$ și $0 < c \leq d$, atunci $ac \leq bd$ și $\frac{a}{d} \leq \frac{b}{c}$;

- dacă a și b au același semn, atunci produsul ab este pozitiv;

- dacă a și b au semne diferite, atunci produsul ab este negativ.

☒ Fie a și b două numere reale pozitive și $m_h = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ (media armonică),

$m_g = \sqrt{ab}$ (media geometrică), $m_a = \frac{a+b}{2}$ (media aritmetică).

Să se demonstreze că: $m_h \leq m_g \leq m_a$ (**inegalitatea mediilor**).

Soluție

Arătăm că $m_h \leq m_g$. Scriem inegalitatea sub forme echivalente ajungând la o inegalitate evident adevărată. Se obține succesiv:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0,$$

inegalitate adevărată. Așadar, $m_h \leq m_g$.

Demonstrăm că $m_g \leq m_a$ urmând scrierea sub forme echivalente.

$$\text{Avem succesiv: } \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow 2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0,$$

inegalitate adevărată.

Rezultă că $m_h \leq m_g \leq m_a$.

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Fie a și b numere reale pozitive. Să se ordoneze de la cel mai mic la cel mai mare numerele: $a, b, \frac{a+b}{2}, \sqrt{a^2+b^2}$.

E2. Fie a, b numere reale pozitive. Să se arate că:

a) $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$;

b) $m_a - m_g \geq m_g - m_h$;

c) $m_g \leq \frac{m_a + m_h}{2} \leq m_a$.

E3. Dacă $0 < a < b$ să se arate că:

a) $m_a - m_h \leq \frac{(b-a)^2}{4a}$;

b) $m_a - m_g \leq \frac{(b-a)^2}{8a}$.

E4. Fie a, b, x, y numere reale. Atunci au loc inegalitățile:

a) $(ax+by)^2 \leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

(*inegalitatea Cauchy-Buniakowski-Schwartz*);

b) $\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2} \leq \sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{b^2+y^2}$

(*inegalitatea lui Minkowski*).

APROFUNDARE

A1. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se demonstreze că:

a) $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$;

b) $\frac{b+c}{a} + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} \geq 6$.

A2. Dacă a, b, c sunt numere reale pozitive, să se demonstreze că:

a) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$;

b) $a(b^2+c^2) + b(a^2+c^2) +$

$+c(a^2+b^2) \geq 6abc$;

c) $2(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a+b)ab + (b+c)bc + (a+c)ac;$
 d) $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc.$

A3. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere pozitive. Să se arate că:

$$\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_3} + \dots + \sqrt{a_1 a_n} + \sqrt{a_2 a_3} + \dots + \sqrt{a_{n-1} a_n} \leq \frac{n-1}{2} (a_1 + a_2 + \dots + a_n).$$

A4. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere pozitive cu suma 1. Să se arate că:

a) $\frac{a_1 a_2}{a_1 + a_2} + \frac{a_2 a_3}{a_2 + a_3} + \dots + \frac{a_n a_1}{a_n + a_1} \leq \frac{1}{2};$

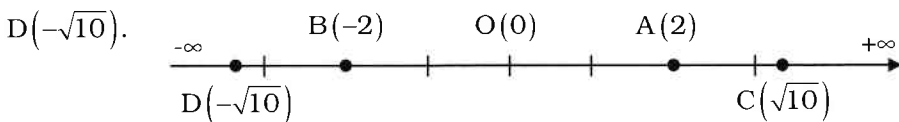
b) $\sqrt{a_1(a_2 + a_3 + \dots + a_n)} + \sqrt{a_2(a_1 + a_3 + \dots + a_n)} + \dots + \sqrt{a_n(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})} \leq \frac{n}{2}.$

A5. Fie a_1, a_2, \dots, a_n numere pozitive cu produsul 1. Să se arate că:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

1.3. MODULUL UNUI NUMĂR REAL

Să considerăm pe axa numerelor reale punctele $A(2), B(-2), C(\sqrt{10})$ și



Avem că $OA = OB = 2$ și $OC = OD = \sqrt{10}$.

Mai general, dacă $M(a)$ și $N(-a)$ sunt puncte pe axa numerică, ele sunt simetrice față de originea $O(0)$ și $d(O, M) = d(O, N)$.

❖ DEFINIȚIE

Se numește **modulul** sau **valoarea absolută** a numărului real a distanța măsurată pe axa numerică de la origine la punctul corespunzător numărului a și se notează $|a|$.

Așadar, $|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0 \end{cases}$

📖 Exemple

• $|-3| = 3; |-\sqrt{10}| = \sqrt{10}; |8| = 8; |0| = 0; |\frac{5}{7}| = \frac{5}{7}; |-3, 21| = 3, 21.$

👉 OBSERVAȚIE

Din definiția modulului unui număr real rezultă cu ușurință următoarele proprietăți:

- a) $|a| \geq 0, \forall a \in \mathbb{R};$
- b) $|a| = 0$ dacă și numai dacă $a = 0;$
- c) $|a| = \max(-a, a)$ (cel mai mare dintre numerele a și $-a$);
- d) $|-a| = |a|, \forall a \in \mathbb{R}.$



Alte proprietăți ale modulului unui număr real sunt cuprinse în teoremele care urmează.

TEOREMA 1

Pentru orice numere reale a, b au loc relațiile:

1. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (inegalitatea triunghiului);
2. $|a - b| \leq |a| + |b|$ (modulul diferenței este mai mic sau egal decât suma modulelor);
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ (modulul produsului este egal cu produsul modulelor);
 $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ (modulul câtului este egal cu câtul modulelor);
4. $||a| - |b|| \leq |a - b|$ (modulul diferenței modulelor este mai mic sau egal decât modulul diferenței);
 $||a| - |b|| \leq |a + b|$ (modulul diferenței modulelor este mai mic sau egal decât modulul sumei).

Demonstrație

1. Trebuie discutate următoarele patru cazuri:

a) Dacă $a \geq 0, b \geq 0$, atunci $a + b \geq 0$ și inegalitatea devine egalitate:

$$|a + b| = a + b = |a| + |b|.$$

b) Dacă $a \leq 0, b \leq 0$, atunci $a + b \leq 0$ și inegalitatea devine egalitate:

$$|a + b| = -a - b = |a| + |b|.$$

c) Dacă $a \geq 0, b \leq 0$, atunci $|a| = a$ și $|b| = -b$.

Dacă $a + b \geq 0$, atunci $|a + b| = a + b \leq a = |a| \leq |a| + |b|$.

Dacă $a + b \leq 0$, atunci $|a + b| = -a - b = -a + |b| \leq |b| \leq |b| + |a|$.

d) Cazul $a \leq 0, b \geq 0$ se tratează precum cazul c).

2. Avem succesiv: $|a - b| = |a + (-b)| \stackrel{1}{\leq} |a| + |-b| = |a| + |b|$.

3. Demonstrația egalităților $|ab| = |a||b|$, $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ rămâne drept temă.

4. Avem $|a| = |a - b + b| = |(a - b) + b| \stackrel{1}{\leq} |a - b| + |b|$. Rezultă că $|a| - |b| \leq |a - b|$, (1).

$|b| = |b - a + a| = |(b - a) + a| \leq |b - a| + |a|$, deci $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$, (2).

Deoarece $||a| - |b||$ este egal cu unul dintre numerele $|a| - |b|$ sau $|b| - |a|$, rezultă cu ajutorul relațiilor (1) și (2) că $||a| - |b|| \leq |a - b|$. ■

▲ Temă

- **Demonstrați inegalitatea** $||a| - |b|| \leq |a + b|$.

Următoarele proprietăți sunt des folosite în rezolvarea unor inecuații sau în caracterizarea intervalelor de numere reale.

▣ TEOREMA 2

Pentru orice număr real a și orice număr real pozitiv c au loc relațiile:

1. $|a| \leq c$ dacă și numai dacă $-c \leq a \leq c$;
2. $|a| \geq c$ dacă și numai dacă $a \leq -c$ sau $a \geq c$.

Demonstrație

1. **Suficiența** (\Rightarrow) Considerăm că $|a| \leq c$.

Dacă $a \geq 0$ rezultă că $|a| = a \leq c$.

Dacă $a < 0$, rezultă că $|a| = -a \leq c$, adică $a \geq -c$.

Așadar $-c \leq a \leq c$, $\forall a \in \mathbb{R}$ și $c > 0$.

2. **Necesitatea** (\Leftarrow) Considerăm ipoteza $-c \leq a \leq c$, (1).

Înmulțind cu -1 rezultă inegalitățile: $c \geq -a \geq -c$, adică $-c \leq -a \leq c$, (2).

Dacă $a \geq 0$, atunci $|a| = a$ și din (1) se obține că $|a| \leq c$.

Dacă $a < 0$, atunci $|a| = -a$ și din (2) rezultă că $|a| \leq c$. ■

▲ Temă

- **Justificați proprietatea modului:** $|a| \geq c \Leftrightarrow a \leq -c$ sau $a \geq c$.
- **Demonstrați teorema 2, înlocuind inegalitățile \leq, \geq cu $<,$ respectiv $>$.**

Exerciții rezolvate

☒ 1. Pentru orice număr real a avem că: $\sqrt{a^2} = |a|$.

a) Dacă $0 \leq a \leq 2$ să se scrie sub formă mai simplă expresia:

$$E(a) = \sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{4+4a+a^2} - \sqrt{(3-a)^2} + \sqrt{4a^2+49-28a}$$

b) Să se demonstreze că:

$$\sqrt{y^2 - 4\sqrt{2}y + 12} + \sqrt{5t^2 + 40t + 89} \geq 5, \forall y, t \in \mathbb{R}$$

Soluție

a) Din condiția $0 \leq a \leq 2$ obținem că:

$a - 2 \leq 0$, $a + 2 \geq 2 > 0$, $(3 - a) \geq 1 > 0$ și $2a - 7 \leq -3 < 0$, (1).

Expresia se scrie succesiv:

$$\begin{aligned} E(a) &= \sqrt{(a-2)^2} + \sqrt{(2+a)^2} - \sqrt{(3-a)^2} + \sqrt{(2a-7)^2} = |a-2| + |2+a| - |3-a| + \\ &+ |2a-7| \stackrel{(1)}{=} (-a+2) + (2+a) - (3-a) + (-2a+7) = 8-a. \end{aligned}$$

b) Analizăm expresiile de sub radical și avem:

$$y^2 - 4\sqrt{2}y + 12 = (y - 2\sqrt{2})^2 + 4 \geq 4, \forall y \in \mathbb{R}.$$

$$5t^2 + 40t + 89 = 5(t^2 + 8t + 16) + 9 = 5(t + 4)^2 + 9 \geq 9, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Rezultă că $\sqrt{y^2 - 4\sqrt{2}y + 12} + \sqrt{5t^2 + 40t + 89} \geq 2 + 3 = 5, \forall y, t \in \mathbb{R}.$

☒ 2. Dacă $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ să se demonstreze că:

$$\text{a) } \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right| = \left| \frac{a-b}{c} \cdot \frac{b-c}{a} \cdot \frac{c-a}{b} \right|;$$

$$\text{b) } \left| \frac{a-b}{c} \right| + \left| \frac{b-c}{a} \right| + \left| \frac{c-a}{b} \right| \geq \left| \frac{a-b}{c} \right| \cdot \left| \frac{b-c}{a} \right| \cdot \left| \frac{c-a}{b} \right|.$$

Soluție

a) Prin calcul algebric se obține succesiv:

$$\begin{aligned} \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right| &= \left| \frac{ab(a-b) + b^2c - c^2b + c^2a - a^2c}{abc} \right| = \\ &= \left| \frac{ab(a-b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a-b)}{abc} \right| = \left| \frac{(a-b)(ab - ac - bc + c^2)}{abc} \right| = \\ &= \left| \frac{(a-b)(b-c)(a-c)}{abc} \right| = \left| \frac{a-b}{c} \cdot \frac{b-c}{a} \cdot \frac{c-a}{b} \right|. \end{aligned}$$

b) Se folosesc proprietățile modului:

$$|x + y + z| \leq |x| + |y| + |z|, \forall x, y, z \in \mathbb{R} \text{ și } |xyz| = |x| \cdot |y| \cdot |z|, \forall x, y, z \in \mathbb{R}.$$

$$\begin{aligned} \text{Avem: } \left| \frac{a-b}{c} \right| + \left| \frac{b-c}{a} \right| + \left| \frac{c-a}{b} \right| &\geq \left| \frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b} \right| \stackrel{\text{a)}}{=} \left| \frac{a-b}{c} \cdot \frac{b-c}{a} \cdot \frac{c-a}{b} \right| = \\ &= \left| \frac{a-b}{c} \right| \cdot \left| \frac{b-c}{a} \right| \cdot \left| \frac{c-a}{b} \right|. \end{aligned}$$

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

EXERSARE

E1. Să se determine numerele reale care verifică expresiile:

a) $|a| = 8;$

b) $|x| = -8;$

c) $|-y| = 2;$

d) $|a + 3| = 1;$

e) $|-x - 4| = 5;$

f) $|3 - 6y| = 12;$

g) $\left| \frac{x}{2} - \frac{x-3}{4} \right| = 2;$

h) $|(x-2)(4-y)| = 0.$

E2. Să se determine numerele întregi care verifică egalitățile:

a) $\left| \frac{x}{2} + \frac{3x}{4} - \frac{5x}{6} \right| = \frac{15}{2};$

b) $|x(x-2) - (x-3)^2| = 3;$

c) $|(2-x)(x+2) + (x+3)^2| = 5;$

d) $\left| \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 - 2x\left(x + \frac{1}{4}\right) \right| = 2;$

e) $|4x^2 + 9x - 9| = 0;$

f) $|(x+1)^3 - (x-2)^3| = 9;$

g) $\left| \frac{3}{x^3 - 8} \right| = \left| \frac{1}{x-2} \right|.$

E3. Să se determine numerele reale care verifică inegalitățile:

- a) $|3x - 2| \leq 0$; b) $|4 - 6x| < 0$;
 c) $|x| < 3$; d) $|3x - 4| - 5 \leq 0$;
 e) $|y - 2| > 0$; f) $|a + 5| \geq 0$;
 g) $|x^5 - 1| + |x^6 + 9| > 0$.

E4. Să se rezolve inecuațiile:

- a) $\left| \frac{3n+1}{n} - 3 \right| > \frac{1}{5}$, $n \in \mathbf{N}^*$;
 b) $\left| \frac{n+1}{2n+3} - \frac{1}{2} \right| > \frac{1}{12}$, $n \in \mathbf{Z}$;
 c) $\left| 1 - \frac{n^2+2}{n^2+1} \right| \geq \frac{1}{10}$, $n \in \mathbf{Z}$;
 d) $\left| \frac{3^n+2}{3^n+1} - 1 \right| \leq \frac{1}{28}$, $n \in \mathbf{N}$.

E5. Să se rezolve ecuațiile:

- a) $|2x + 3| - 4|2 - (2x + 5)| = -27$;
 b) $\frac{|x-1|}{4} - \left(\frac{|x-2|}{4} + \frac{7-2|x|}{5} \right) =$
 $= \frac{5|x|-5}{10} - \frac{7}{4}$;
 c) $\frac{3}{2} \left| x - \frac{3}{2} \right| = \frac{5}{3} \left| x - \frac{3}{2} \right| - \frac{8}{5}$;
 d) $4|2x| - 7,1(6) = \frac{5}{3}|2x| - \frac{1}{6}$;
 e) $|9x + 45| = |3x + 15|$;
 f) $|x^2 - 9| + |x + 3| = 0$;
 g) $\sqrt{(x^2 - 10x + 25)} + 5|x - 5| = 0$;
 h) $\sqrt{25x^2 - 30x + 9} = \sqrt{9x^2 + 24x + 16}$.

APROFUNDARE

A1. Dacă $a \in \mathbf{N}$ și $b \in \mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$, să se scrie sub formă mai simplă expresia:

$$\sqrt{25a^2} - \sqrt{\frac{b^2}{4-2}} + \sqrt{\frac{1}{(a+1)^{-2}}} - \sqrt{(2a+1)^2} - \sqrt{(b-a)^2}.$$

A2. Dacă $-2 \leq b \leq -1$, să se rezolve ecuația:

$$\sqrt{(b+1)^2} - \sqrt{(b+2)^2} + \sqrt{(3-2b)^2} = \sqrt{(b-3)^2}.$$

A3. Dacă $x < 0$ să se rezolve ecuația:

$$|x^2 + 8| - |3x - 2| - \sqrt{(x-3)^2} + \sqrt{(2-x)^2} - \sqrt{x^4} - \sqrt{(-2x)^2} = 0.$$

A4. Fie $x, y \in \mathbf{R}$ astfel încât $|y - 2x - 7| \leq 3$ și $|4 - 3y| \leq 2$. Să se arate că $-4 \leq x + y \leq 1$.

A5. Fie $x_i \in \mathbf{R}$ și $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$, $i = \overline{1, n}$.

Să se arate că $|\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$.

A6. Fie a, b, c numere reale pozitive. Să se arate că:

$$(ab + bc + ca) \left| 1 - \frac{1}{abc} \right| \leq \left| ab - \frac{1}{c} \right| + \left| bc - \frac{1}{a} \right| + \left| ac - \frac{1}{b} \right|.$$

A7. Dacă $a, b, c \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, să se demonstreze că:

- a) $(|a| + |b| + |c|) \left(\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \right) \geq 9$;
 b) $\frac{1}{|a|} + \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|c|} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{|abc|}$.

A8. Fie $a > 0$ și $x, y, z \in \mathbf{R}$ astfel încât:

$$|x| < \frac{1}{a}, |y| < \frac{1}{a}, |z| < \frac{1}{a}.$$

Să se demonstreze că:

- a) $\frac{x+y}{1+a^2xy} < \frac{1}{a}$;
 b) $\frac{x+y+z+a^2xyz}{1+a^2(xy+yz)} < \frac{1}{a}$.